INTERAKTIVE SIMULATION TRANSIENTER WÄRMETRANSPORTPROZESSE IN UND AN GEBÄUDEN

Sebastian Bindick, Maik Stiebler, Manfred Krafczyk
Institut für rechnergestützte Modellierung im Bauingenieurwesen
Technische Universität Braunschweig
Pockelsstr. 3, 38106 Braunschweig, Deutschland

KURZFASSUNG

In diesem Artikel wird ein Software-Prototyp zur transienten Simulation thermischer Transportprozesse in und an Gebäuden vorgestellt. Hierbei wird besonders auf die Strahlungs-Struktur-Wechselwirkung eingegangen, die für viele Ingenieurprobleme von besonderer Bedeutung ist. Die numerische Berechnung des Strahlungsaustausches basiert auf der Radiosity-Methode und wurde um Beschleunigungsverfahren erweitert, die es erlauben das instationäre Strahlungsproblem effiziente zu lösen. Die Strahlungssimulation ist direkt an die Berechnung der Wärmeleitung in der Struktur, basierend auf der Finite-Differenzen-Methode, angekoppelt. Das entwickelte Simulationsframework ist außerdem in einen virtuellen Entwurfsraum eingebettet, der neben der Verwendung komplexer Geometrien auch Ansätze des Computational Steering unterstützt.

ABSTRACT

In this article we present a software prototype for transient simulations of heat transport problems in civil engineering, combining efficient numerical methods with a computational steering framework which supports interactive modeling, simulation and visualization of heat transfer in complex buildings. For the full radiant energy exchange in three-dimensional domains an optimized hierarchical radiosity method is used. Here the radiation is directly coupled to the heat conduction calculation based on the Finite-Difference-Method.

EINLEITUNG

Ein umfangreiches Wissen über komplexe thermische Prozesse in und an Gebäuden kann nur mit Hilfe von transienten 3D Simulationen (oder mittels extrem aufwändiger Experimente) erlangt werden. Dieser Artikel stellt einen Software-Prototypen zur effizienten Simulation und Optimierung thermischer Systeme vor, wie sie für Ingenieuranwendungen insbesondere im Bauingenieurwesen typisch sind (vgl. Abbildung 1). Der Fokus wurde hierbei auf die Strahlungs-Struktur-Wechselwirkung gelegt, die für viele bauphysikalische Fragestellungen von großer Bedeutung ist.

Zur Lösung des Wärmestrahlungsproblems wird ein numerischer Ansatz basierend auf der hierarchischen Radiosity-Methode verwendet. Durch die Verwendung von hochoptimierten Kd-Bäumen zur Speicherung der an der Strahlung beteiligten Objekte und der Verwendung eines adaptiven hierarchischen Ansatzes zur Berechnung des Strahlungsaustausches konnte die Laufzeitkomplexität drastisch reduziert werden. Der Strahlungskern ist direkt an ein Modul zur Simulation der Wärmeleitung gekoppelt. Hierbei wird der Energietransport in wärmeleitenden Materialien für instationäre Temperaturfelder mit einem Finite-Differenzen-Verfahren (FDM) berechnet. Dieses konnte aufgrund seiner besonderen Struktur effizient zur parallelen Berechnung auf Grafikkarten (GPGPU´s) implementiert werden, um die typische Laufzeit um zwei Größenordnungen reduzieren.

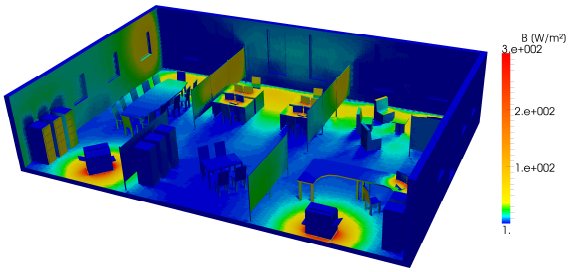

Abbildung 1 Energieverteilung in einem Büroraum zur Behaglichkeitsoptimierung

Neben den modernen numerischen Ansätzen zur Lösung des physikalischen Problems werden auch Methoden des Computational Steering eingesetzt, die eine direkte Modifikation des Simulationssystems zur Laufzeit (d.h. ohne die laufende Simulation zu unterbrechen) erlauben und damit ermöglichen ein schnelles und detaillierteres Wissen der Auswirkungen von Änderungen (beispielsweise an der Gebäudegeometrie) zu erlangen. Hierbei kann eine Gruppe von Fachplanern innerhalb eines virtuellen Entwurfsraumes kooperativ komplexe Gebäudestrukturen unter thermischen Gesichtspunkten optimieren.

In den folgenden Abschnitten wird ein Überblick über die entwickelten Komponenten, die numerischen Ansätze und Anwendungsbeispiele gegeben.

THERMISCHE SIMULATION

Wärme ist eine Energieform, die entweder diffusiv (bedingt durch Gradienten), konvektiv (durch Strömung) oder durch Strahlung übertragen wird. Ein Wärmestrom ist typischerweise mit einem Entropiestrom verbunden, so dass die Wärme nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik immer in Richtung fallender Temperatur fließt. Neben der Temperaturdifferenz haben jedoch auch noch andere Größen Einfluß auf den Wärmetransport, wie z.B. physikalische Stoffeigenschaften, der Strömungszustand des transportierenden Fluids oder die geometrischen Eigenschaften. Konvektive Wärmeübertragung, Wärmeleitung und Wärmestrahlung können allein oder in Kombination miteinander auftreten.

Simulation von Wärmestrahlung mit der Radiosity Methode

Körper mit einer Temperatur oberhalb des absoluten Nullpunktes emittieren ein kontinuierliches Spektrum elektromagnetischer Wellen. Diese Art der Wärmeübertragung erfordert im Gegensatz zur Wärmeleitung oder Konvektion keinen stofflichen Träger und stellt einen wichtigen Mechanismus zum Wärmeaustausch dar (Siegel et al., 2002). Hierbei wird durch Emissions- und Absorptionsprozesse Wärmeenergie zwischen voneinander getrennten Körpern ausgetauscht. Neben der ungleichförmigen Verteilung der Wärmestrahlung über das Spektrum der elektromagnetischen Wellen ist die Strahlungsintensität auch von der Richtung im Halbraum abhängig (Modest, 2003). Diese doppelte Abhängigkeit macht die Betrachtung von Wärmestrahlung kompliziert. Im Rahmen dieses Beitrags wird die Wellenlängenabhängigkeit vernachlässigt, eine Vereinfachung, die bei bauphysikalischen Anwendungsfällen mit ihren typischerweise relativ geringen Temperaturen zu guten Ergebnisse führt.

Zur Simulation des Strahlungsaustausches wird die hierarchische Radiosity-Methode verwendet, ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Wärmestrahlung zwischen diffusen Oberflächen in einer abgeschlossenen Umgebung (Goral et al., 1984). Die Oberflächen der zu untersuchenden Struktur werden hierbei in viele kleine Elemente, die sogenannten Patches, unterteilt. Basierend auf dem Energieerhaltungssatz kann für die Umgebung ein Gleichungssystem aufgestellt werden, wobei jeder Patch den Anteil der Wärmeenergie reflektiert, den er empfängt, aber nicht absorbiert (Cohen et al., 1988). Die diskrete Radiosity Gleichung hat die Form:

$$B_i = E_i + \rho_d \sum_{j=1}^{n} B_j F_{ij}$$

Hierbei beschreibt der Formfaktor F_{ij} die relative Position und Orientierung zwischen zwei sich beeinflussenden Patches. Der in den Formfaktor eingehende Sichtbarkeitstest zwischen zwei Oberflächen stellt den weitaus rechenaufwendigsten Schritt beim Radiosity-Verfahren dar. Dieser konnte durch Verwendung einer hierarchischen Datenstruktur zur Speicherung der Patches auf eine Komplexität von O(log n) reduziert werden. Hierbei werden die geometrischen Primitiven (Oberflächendreiecke) in sogenannte Kd-Bäume einsortiert, vgl. Abbildung 2 (Havran, 2002). Ein k-dimensionaler Baum (Kd-Baum) ist eine besondere Form eines unbalancierten binären Suchbaums, der sich für die Sichtbarkeitstests (basierend auf dem Raytracing-Algorithmus) als sehr effiziente Variante zur Speicherung von Oberflächennetzen erwiesen hat (Havran et al., 2002, Szirmay-Kalos et al., 2002). Gegenüber anderen Raumpartitionierungsverfahren wie Octrees, Bounding-Volume-Hierarchien (BVH) oder regulären Gittern kann für das Raytracing ein Speedup von mehreren Größenordnungen erreicht werden.

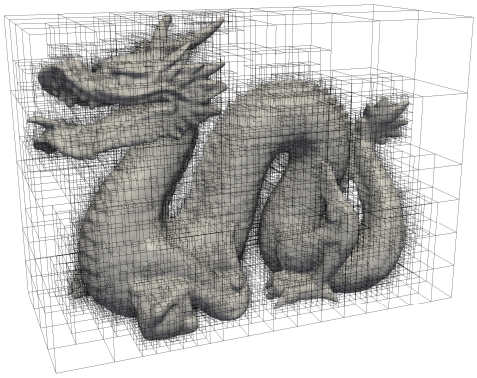

Abbildung 2 Oberflächennetz und Kd-Baum einer komplexen Geometrie

Zur Beschleunigung des klassischen Radiosity-Ansatzes wird die hierarchische Radiosity-Methode verwendet, ein Verfahren, dass eine adaptive (Quadtree-ähnliche) Verfeinerung der Oberflächen in Abhängigkeit des Formfaktors zwischen zwei Energie austauschenden Flächen vornimmt (Hanrahan et al., 1991). Ziel dieses Ansatzes ist das Einrichten sogenannter Links zwischen Oberflächen (verschiedener Verfeinerungsstufen), die zum Energieaustausch verwendet werden. Hiermit läßt sich die Komplexität der Radiosity-Methode von $O(n^2)$ auf $O(k^2 + n)$ reduzieren, wobei k die Anzahl der Eingangsoberflächen und n die Anzahl der verfeinerten Flächen darstellt. Die Gesamtkomplexität unter Verwendung der Kd-Baum Datenstruktur und des Hierarchischen Radiosity-Verfahrens beträgt somit $O((k^2 + n) \log k)$. Eine detaillierte Beschreibung und Validierung des Strahlungskerns kann (Bindick et al., 2010a) entnommen werden.

Simulation von Wärmeleitung mit der Finite-Differenzen-Methode

Die Wärmeleitung in einem Feststoff oder in einem ruhenden Fluid wird durch Temperaturgradienten

induziert (Welty et al., 2001). Aufgrund des Energieerhaltungssatzes geht dabei keine Energie verloren (Baehr et al., 2006). Der Energietransport erfolgt zwischen benachbarten Molekülen. In Festkörpern erfolgt der Transport von thermischer Energie ausschließlich durch Wärmeleitung, in Fluiden wird die Wärmeleitung durch Strömung (Konvektion) und durch Wärmestrahlung überlagert. Ein wichtiges Maß für den Wärmestrom in einem Stoff ist die Temperaturleitfähigkeit α, welche sich aus Wärmekapazität, Dichte und Wärmeleitfähigkeit des Materials zusammensetzt. Der Energietransport in einem wärmeleitenden Material für instationäre Temperaturfelder mit Wärmequellen kann durch die Fouriersche Differentialgleichung für eine konstante Wärmeleitfähigkeit das Temperaturfeld beschrieben werden:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{W(x,y,z,t,\vartheta)}{c\varrho}$$

Zur numerischen Lösung dieses Anfangswertproblems wurde ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren (FDM) implementiert, bei der die Ableitungen der Wärmeleitungsgleichung durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Diese Diskretisierung approximiert die Lösung der Gleichung an diskreten Stellen, die ein Gitternetz in Raum und Zeit bilden. Die Finite-Differenzen-Methode wird hierbei parallel unter Verwendung des CUDA Frameworks von NVIDIA auf der Grafikkarte ausgeführt (Micikevicius, 2009). Dieser Ansatz führt zu einer Reduzierung der typischen Laufzeit um zwei Größenordnungen.

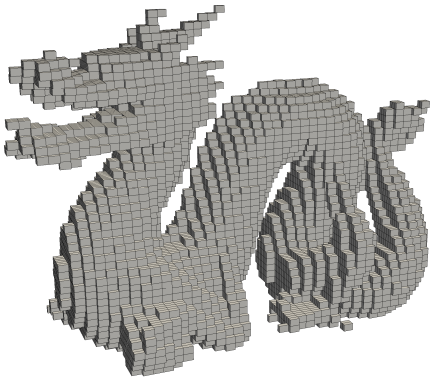

Abbildung 3 Voxelisierung einer komplexen Geometrie

Als Rechengitter für das FDM-Verfahren werden kartesische, strukturierte Gitter verwendet, die eine bauteilweise Diskretisierung mit unterschiedlichen Auflösungen in die einzelnen Raumrichtungen ermöglichen. Für die schnelle Gittergenerierung, die man für interaktive Simulationen benötigt, wird ein Ansatz zur Voxelisierung nach (Ogayar et al., 2007) verwendet. Dieser Algorithmus stellt eine Erweiterung des im zweidimensionalen bekannten Scanline-Verfahrens dar und lässt sich besonders effizient hardware-beschleunigt ausführen. Abbildung 3 zeigt die Voxelisierung einer komplexen Geometrie.

Die Wärmeleitungsgleichung wird bauteilweise gelöst, d.h. die Berechnung wird für jedes Bauteil getrennt in einem separaten Prozeß gestartet und hat aufgrund unterschiedlicher Auflösung der Bauteile und das daraus resultierenden Stabilitätskriteriums eine eigene Zeitschrittweite. Für aneinandergrenzende Bauteile wird an den Rändern eine Synchronisation notwendig, die über ein Interface durchgeführt wird, das eine zeitliche und räumliche Interpolation der ausgetauschten Energien und Temperaturen durchführt. Durch diese entkoppelte Berechnungsweise lässt sich die Wärmeleitungsberechnung leicht parallel auf mehreren Rechnern durchführen.

Strahlungs-Struktur-Wechselwirkung

Die Strahlungs-Struktur-Wechselwirkung, also die Kopplung von Wärmestrahlung und Wärmeleitung, wird durch Vorgabe von Wärmeflüssen an der Körperoberfläche über eine Neumann-Randbedingung (Randbedingung der zweiten Art) realisiert. Dabei werden basierend auf dem Fourierschen Gesetz Werte auf dem Rand für die Normalableitung der Lösung vorgegeben. Die Wärmestromdichte $\dot{q}w$ am Rand lässt sich durch den folgenden Ausdruck beschreiben:

$$\dot{q}w = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial n}$$

Unter Berücksichtigung der Zeitschrittweite beider Verfahren kann nun an der Oberfläche der Körper die Ein- und Ausstrahlung berechnet werden, die dann als Wärmestromdichte am Rand bei der Wärmeleitung berücksichtigt wird. Die Validierung, also der Vergleich der Simulation mit einer analytischen Lösung für das Problem, zeigt, dass das implementierte numerische Verfahren für die Ankopplung der Strahlung an die Temperaturdynamik der Struktur asymptotisch die korrekte analytische Lösung liefert.

INTERAKTIVE SIMULATION IN EINEM VIRTUELLEN ENTWURFSRAUM

Das entwickelte thermische Simulationsmodell ist in einen interaktiven virtuellen Entwurfsraum auf Basis von AutoCAD eingebettet. Die CAD-Anwendung wird hierbei direkt an den Simulationskern gekoppelt und wurde um eine Vielzahl notwendiger Funktionen erweitert. Diese umfassen u.a. eine Schnittstelle zum Transfer der Simulationsdaten an den Rechenkern (auf Basis von Netzwerk-Sockets) sowie Teile des Pre-Processings für die Simulationsdaten. Des Weiteren wurden Überwachungswerkzeuge zur Kontrolle der Eingabeparameter (Plausibilitätsprüfungen) für die Simulation und die Möglichkeit geometrischer Modifikationen während des Konstruktionsprozesses implementiert. Hierbei müssen Daten nicht aufwendig konvertiert, sondern können direkt an die laufende Simulation übertragen werden. Die zusätzlichen

bauteilspezifischen Parameter wie Randbedingungen und Materialkennwerte werden über das CAD-Werkzeug vorgegeben und können ebenfalls interaktiv verändert werden.

Ziel des interaktiven Ansatzes ist es, durch direkte Modifikation des Simulationssystems zur Laufzeit, d.h. ohne die laufende Simulation zu unterbrechen, ein schnelles und detaillierteres Wissen der Auswirkungen von Änderungen beispielsweise an der Gebäudegeometrie zu erlangen. Dieser Ansatz erlaubt einer Gruppe von Fachplanern innerhalb des virtuellen Entwurfsraumes eine kooperative Gebäudeoptimierung.

Der Computational-Steering-Ansatz stellt durch die Integration von komplexer Simulation, Datenanalyse, Visualisierung und Nachbearbeitung sehr hohe Anforderungen an die unterstützende Hardware und Algorithmik. Aus diesem Grund wird neben der parallelen Simulation auch die Visualisierung verteilt auf mehrere Grafikkarten durchgeführt. Der entwickelte Ansatz, basierend auf dem CGLX-Framework, ermöglicht eine effiziente Darstellung großer Datenmengen, die in der thermischen Simulation in jedem Zeitschritt anfallen (Doerr et al., 2010). Die Cross-Platform Cluster Graphic Library (CGLX) ist ein OpenGL Framework für skalierbare verteilte Visualisierungsumgebungen, die es ermöglicht, Daten auf Tiled-Display-Umgebungen mit sehr hohen Auflösungen (>300 Mega Pixel) zu rendern. Durch den verteilten Ansatz wird eine schnelle Ausgabe und Manipulation großer Datenmengen erst möglich. Für kooperative Planungsprozesse haben sich Tiled-Display-Umgebungen als besonders vorteilhaft erwiesen (Ahrens et al., 2000, Li et al., 2002).

Eine Gruppe von Planern kann hierbei mit dem Gebäudemodell virtuell interagieren, sich um das Modell bewegen, es von unterschiedlichen Standpunkten betrachten und das Modell berühren. Somit wird eine kooperative Gebäudeoptimierung möglich, die mit konventionellen Computerbildschirmen nicht zu erreichen wäre.

Abbildung 4 zeigt das generelle Systemlayout des virtuellen Entwurfsraums bestehend aus vier Komponenten: Dem Modellierer auf Basis von AutoCAD, einem Head-Node zur Steuerung und Synchronisation der Simulation und Visualisierung, dem verteilten thermischen Simulationskern sowie der verteilten Visualisierung mit Ausgabe auf dem Tiled-Display-System. Eine detaillierte Systembeschreibung kann (Bindick et al., 2010b) entnommen werden.

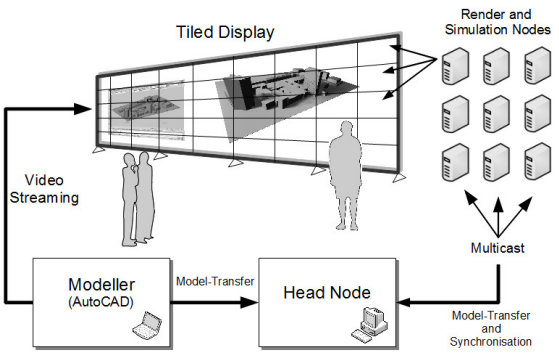

Abbildung 4 Systemlayout des virtuellen Entwurfsraums

ERGEBNISSE

Die folgenden Anwendungsbeispiele aus dem Bauingenieurwesen zeigen verschiedene Einsatzgebiete des entwickelten Software-Prototypen. Diese reichen von Behaglichkeitsoptimierungen in Innenräumen über thermischen Optimierungen von Gebäudestrukturen bis hin zur effizienten Planung von Solaranlagen. Hierzu wurde der Prototyp erfolgreich in diversen Industrieprojekten projektbegleitend als Planungswerkzeug eingesetzt.

Beispielrechnung für ein Einfamilienhaus

Dieses Anwendungsbeispiel zeigt die Temperaturentwicklung in und an einem Einfamilienhaus. Die Gebäudegeometrie und wärmetechnischen Eigenschaften der Bauteile sind dem Musterhaus der DIN 4108 (Wärmeschutz und Energie-Einsparung in Gebäuden - Teil 6) entnommen. Vereinfachend wurden einschalige Bauteile verwendet. Als äußere Randbedingungen wurde eine konstante Umströmungsgeschwindigkeit der äußeren Bauteile von 1 m/s angenommen. Der konvektive Wärmeübergang wurde hier durch einen konstanten Wärmeübergangskoeffizienten berücksichtigt (das Strömungsproblem also nicht weiter betrachtet). Die äußere Lufttemperatur wurde mit 25°C und die innere mit 20°C angenommen. Die Simulation wurde über einen Tag (Echtzeit) durchgeführt mit einer sich ändernden solaren Einstrahlung (in Abhängigkeit des tatsächlichen Sonnenstandes). Abbildung 5 zeigt die Temperatur- und Energieverteilung am Gebäude am Nachmittag (ca. 15.00 Uhr). In Schnitten durch die Westfassade des Gebäudes sind die Temperaturverteilungen angetragen. Zur Diskretisierung der Oberflächen wurden ca. 2,5 Millionen Dreiecke verwendet, für die Strukturgitter wurden pro Bauteil 40000 Knoten verwendet.

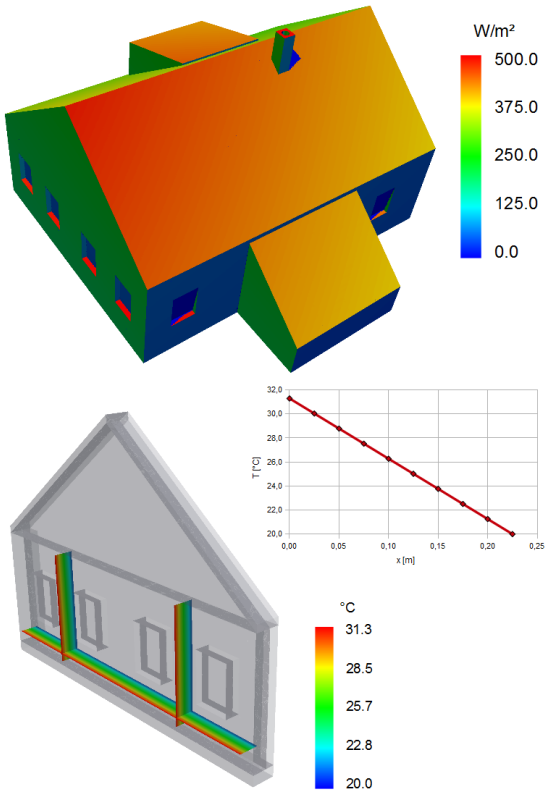

Abbildung 5 Temperaturverteilung an einem Einfamilienhaus

Sonneneinstrahlung auf ein Stadtmodell

Dieses Simulationsbeispiel zeigt die Energieverteilung durch direkte Sonneneinstrahlung auf ein Stadtmodell mit ca. 10 Millionen Oberflächendreiecken. In Abbildung 6 ist die Energieverteilung auf den Oberflächen am späten Nachmittag farblich dargestellt. Die Durchführug der Simulation auf einem herkömlichen Desktop-PC betrug wenige Minuten. Bei diesem Szenario wurde der konvektive Wärmeübergang vernachlässigt. Außen- und Innentemperatur betrugen 25°C. Abschließend lässt sich feststellen, dass die Simulation für komplexere Geometrien möglich ist und qualitativ sinnvolle Ergebnisse liefert.

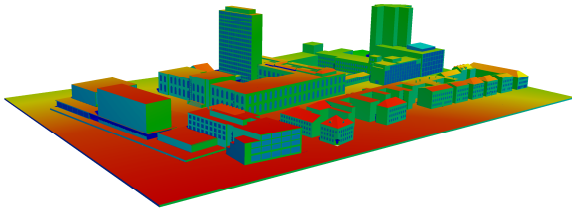

Abbildung 6 Sonneneinstrahlung auf ein Stadtmodell

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Der hier vorgestellte Software-Prototyp eignet sich zur Simulation thermischer Phänomene in komplexen Gebäuden und kann die Fachplaner bei der virtuellen Optimierung von Gebäudestrukturen unterstützen. Durch Einsatz des CAD-basierten Entwurfsraumes können geometrisch sehr komplexe Problemstellungen nicht nur transient simuliert werden, sondern es ist auch möglich, das Systemverhalten in nahezu Echtzeit zu optimieren.

Weitere Ziele dieser Arbeit sind die Kopplung der Strahlungs-Struktur-Simulation an einen Löser des konvektiven Wärmetransports. Hierzu wurden bereits erste Versuche zur Kopplung an einen bestehenden CFD-Code auf Basis der Lattice-Boltzmann-Methode (LBM) unternommen (Krafczyk et al., 2009). Die LB-Methode hat sich zur Simulation von thermischen Strömungen in komplexen Geometrien etabliert und lässt sich aufgrund ihrer Struktur besonders effizient bei relativ geringem Speicherbedarf parallel (auf Computer-Clustern oder Grafikkarten) ausführen.

Erste Ergebnisse der Fluid-Strahlung-Struktur-Kopplung sind für die thermische Untersuchung einer Doppelfassade durchgeführt worden. Ziel dieser Simulation war die Optimierung der Gebäudestruktur eines Bürokomplexes in der Planungsphase für verschiedene bauliche Ausführungen. Abbildung 7 zeigt die Temperaturverteilung innerhalb und vor der Fassade aufgrund einer konstanten solaren Einstrahlung von ca. 750 W/m² bei einer Anfangstemperatur von 25°C.

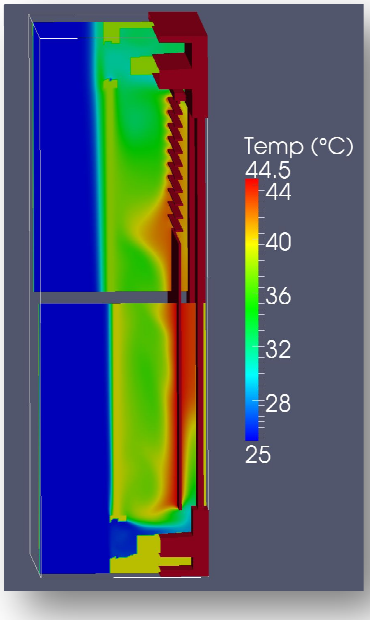

Abbildung 7 Temperaturverteilung in einer Doppelfassade

LITERATUR

Ahrens, J. P., Li, K., Reed, D. A. 2000. Next-generation visualization displays: the research challenges of building tiled displays (panel session), in: VIS'00: Proceedings of the conference on Visualization '00, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 2000, S. 527-529.

Baehr, H. D., Stephan K. 2006. Heat and Mass Transfer. Springer Verlag.

Bindick, S., Stiebler, M., Krafczyk, M., 2010a. Fast kd-tree based hierarchical radiosity for radiative heat transport problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. eingereicht.

Bindick, S., Doerr, K.-U. Krafczyk, M., Kuester, F. 2010b. A Computational Steering Framework for Heat Transport Problems in Civil Engineering, Computers and Structures (Elsevier). eingereicht.

Cohen, M. F., Chen, S. E., Wallace, J. R., Greenberg, D. P. 1988. A progressive refinement approach to fast radiosity image generation. SIGGRAPH Comput. Graph.

Doerr, K., Kuester, F. 2010. CGLX A scalable, high-performance visualization framework for networked display environments, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics (in print) (2010).

Goral, C. M., Torrance, K. E., Greenberg D. P., Battaile, B.. 1984. Modeling the interaction of light between difuse surfaces. SIGGRAPH Comput. Graph., S.213-222.

Hanrahan, P., Salzman, D., Aupperle, L. 1991. A rapid hierarchical radiosity algorithm, in SIGGRAPH '91: Proceedings of the 18th annual conference on Computer graphics and interactive Techniques. S 197-206, New York.

Havran, V. 2000. Heuristic Ray Shooting Algorithms. Ph.D. Thesis, Department of Computer Science and Engineering, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University in Prague.

Havran, V., Bittner, J. 2002. On Improving KD-Trees for Ray Shooting. In Proc. of WSCG 2002 Conference, S. 209-217.

Krafczyk, M., Tölke, J., Ahrenholz, B., Bindick, S., Freudiger, S., Geller, S., Janßen, C., Nachtwey, B. 2009. Kinetic Modeling and Simulation of Environmental and Civil Engineering Flow Problems, in 100 Volumes of 'Notes on Numerical Fluid Mechanics'. S. 341-350. Springer-Verlag, Berlin.

Li, Z., Varshney, A. 2002. A Real-Time Seamless Tiled Display for 3D Graphics, in: Proceedings, Seventh Annual Symposium on Immersive Projection Technology (IPT 2002).

Micikevicius, P. 2009. 3D finite difference computation on GPUs using CUDA. Proceedings of 2nd Workshop on General Purpose Processing on Graphics Processing Units, S.79-84, ACM.

Modest, M. F. 2003. Radiative Heat Transfer. Academic Press, An imprint of Elsevier Science, second Edition.

Ogayar, C. J., Rueda, A. J., Segura, R.J., Feito, F.R. 2007. Fast and simple hardware accelerated voxelizations using simplicial coverings. The Visual Computer. Springer Verlag, Berlin.

Siegel, R., Howell, J.R. 2002. Thermal radiation heat transfer. Taylor & Francis, third Edition.

Szirmay-Kalos, L., Havran, V., Balázs, B., Szécsi, L. 2002. On the Efficiency of Ray-shooting Acceleration Schemes. Proceedings of the 18th Spring Conference on Computer Graphics (SCCG 2002), S.89–98, Budmerice, Slovakia, ACMSiggraph.

Welty, J. R., Wicks, C. E., Wilson, R. E., Rorrer, G. 2001. Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer. John Wiley & Sons, Inc.